

## حركة دوران جسم صلب حول محور ثابت

### I - الأفصول الزاوي - السرعة الزاوية ( تذكير )

يكون جسم صلب ، غير قابل للتشويه ، في حركة دوران حول محور ثابت (  $\Delta$  ) إذا كانت جميع نقطه في حركة دائرية ممركة على هذا المحور باستثناء النقط المنتمية للمحور (  $\Delta$  ) .  
نحدد موضع نقطة متحركة من الجسم ، في مرجع أرضي نعتبره غاليليا في لحظة

#### 1 - الأفصول الزاوي

الأفصول الزاوي للنقطة المتحركة M من جسم صلب في حركة دوران حول محور ثابت (  $\Delta$  ) هو

الزاوية الموجهة  $\theta$  بحيث :  $\theta = (\overline{Ox}, \overline{OM})$  بحيث

أن  $\overline{Ox}$  محورا مرجعيا ( أصل الأطوار )

والمسار الدائري للنقطة المتحركة موجهها في

منحنى الحركة والذي نعتبره موجبا .

وحدة الأفصول الزاوي في النظام العالمي للوحدات هي الرديان rad .

خلال حركة دوران الجسم الصلب حول المحور

(  $\Delta$  ) يتغير الأفصول الزاوي مع الزمن t أي أنه دالة

زمنية  $\theta(t)$  .

#### 2 - السرعة الزاوية $\dot{\theta}$

نعتبر أنه خلال حركة دوران الجسم الصلب حول

المحور (  $\Delta$  ) ، أنه في اللحظة  $t_i$  تحتل النقطة M الموضع  $M_i$  .

نعتبر لحظتين جد متقاربتين  $t_{i-1}$  و  $t_{i+1}$  تؤطران اللحظة  $t_i$  ، في هذه الحالة تساوي السرعة الزاوية

للنقطة M في اللحظة  $t_i$  السرعة المتوسطة للنقطة M بين اللحظتين  $t_{i-1}$  و  $t_{i+1}$  وهي :

$$\dot{\theta} = \frac{\theta(t_{i+1}) - \theta(t_{i-1})}{t_{i+1} - t_{i-1}}$$

$\theta(t_{i+1})$  الأفصول الزاوي للنقطة M في اللحظة  $t_{i+1}$

$\theta(t_{i-1})$  الأفصول الزاوي للنقطة M في اللحظة  $t_{i-1}$

نضع  $\Delta t = t_{i+1} - t_{i-1}$  و  $\Delta \theta = \theta(t_{i+1}) - \theta(t_{i-1})$

إذا كانت  $t_{i-1}$  و  $t_{i+1}$  جد متقاربتين ، فإن  $\Delta t$  تنهاى

نحو الصفر وبالتالي ستكون عندنا :

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta \theta}{\Delta t} \right) = \frac{d\theta}{dt}$$

المشتقة الأولى بالنسبة للزمن للأفصول الزاوي

في اللحظة  $t_i$ .

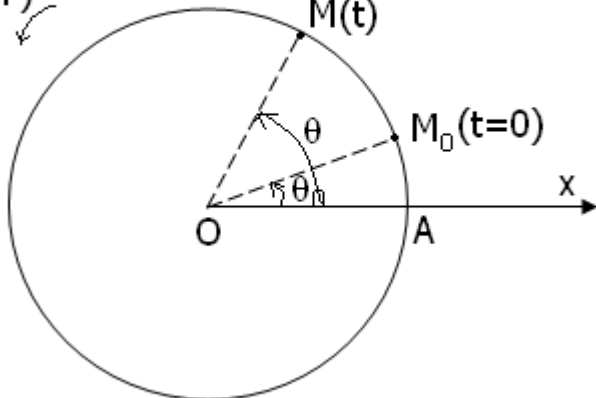
وحدة السرعة الزاوية في النظام العالمي للوحدات

هي rad / s

يرتبط الأفصول الزاوي والأفصول المنحني  $s(t)$  في كل لحظة بالعلاقة التالية :  $s(t) = r \cdot \theta(t)$

منحنى الحركة

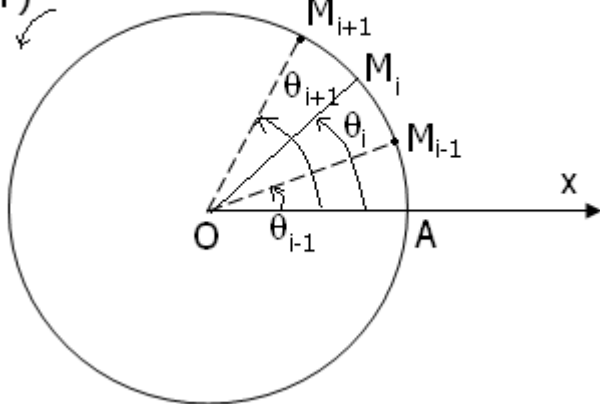
(+)



الأفصول الزاوي  $\theta = (\overline{Ox}, \overline{OM})$

منحنى الحركة

(+)



ومنه نستنتج العلاقة بين السرعة اللحظية للنقطة M  $v(t) = \dot{s}(t)$  (السرعة الخطية) والسرعة الزاوية

$$v(t) = r\dot{\theta}(t) : \dot{\theta}(t)$$

### 3 - التسارع الزاوي $\ddot{\theta}(t)$

#### أ - تعريف

لتكن  $\dot{\theta}(t_i)$  السرعة الزاوية لنقطة M من جسم صلب في حركة دوران حول محور ثابت في لحظة  $t_i$  بحيث مؤطرة بلحظتين جد متقاربتين  $t_{i-1}$  و  $t_{i+1}$  بحيث أن  $\dot{\theta}(t_{i+1})$  السرعة الزاوية للنقطة M في اللحظة  $t_{i+1}$  و  $\dot{\theta}(t_{i-1})$  السرعة الزاوية للنقطة M في اللحظة  $t_{i-1}$

عندما تتناهى  $\Delta t = t_{i+1} - t_{i-1}$  نحو الصفر يتناهى خارج القسمة  $\frac{\dot{\theta}(t_{i+1}) - \dot{\theta}(t_{i-1})}{t_{i+1} - t_{i-1}} = \frac{\Delta \dot{\theta}}{\Delta t}$  إلى المشتقة

بالنسبة للزمن للسرعة الزاوية أي أن :

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\dot{\theta}(t_{i+1}) - \dot{\theta}(t_{i-1})}{t_{i+1} - t_{i-1}} = \frac{d\dot{\theta}}{dt} = \ddot{\theta}(t_i)$$

وحدة التسارع الزاوي في النظام العالمي للوحدات هي  $\text{rad/s}^2$

#### تمرين تطبيقي :

1 - السرعة الزاوية لنقطة متحركة M من جسم صلب في دوران حول محور ثابت هي  $\dot{\theta} = 10 \text{ rad/s}$ .

أ - أحسب التسارع الزاوي  $\ddot{\theta}$  لهذه النقطة .

ب - ما طبيعة حركة النقطة M ؟

ج - أكتب تعبير الأفصول الزاوي  $\theta$  بدلالة الزمن t علما أن الأفصول الزاوي عند أصل التواريخ هو  $\theta_0 = 2 \text{ rad}$ .

2 - تعبير الأفصول الزاوي لنقطة N من جسم صلب في دوران حول محور ثابت هو :

$$\theta(t) = 10t^2 + 40t + 6 \text{ (rad)}$$

أ - أوجد تعبير السرعة الزاوية بدلالة الزمن .

ب - أوجد تعبير التسارع الزاوي بدلالة الزمن .

ج - ما طبيعة حركة النقطة N ؟

#### ب - المركبتان $a_T$ و $a_N$ في أساس فريني .

لدينا في أساس فريني :  $\vec{a} = a_T \vec{u} + a_N \vec{n}$  بحيث أن

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} \text{ و } a_T = \frac{dv}{dt}$$

s الأفصول المنحني للنقطة M في لحظة t و  $v = \frac{ds}{dt}$

السرعة الخطية للنقطة M في اللحظة t و  $\rho$  شعاع

انحناء المسار في اللحظة t .

حسب تعريف الدوران لجسم صلب حول محور ثابت ،

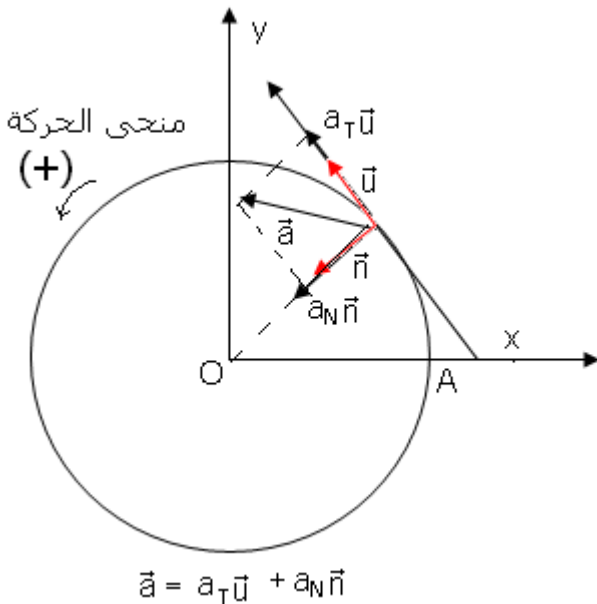
فإن مسار كل نقطة متحركة من الجسم دائريا ממركزا

على محور الدوران وبالتالي يكون اتجاه المتجهة

الواحدية  $\vec{n}$  نحو النقطة O مركز الدائرة ويكون شعاع

الانحناء مساويا لشعاع الدائرة r .

نعلم أن  $s = r\theta$  وأيضا  $\dot{s} = r\dot{\theta}$  ومنه فإن



$$\vec{a} = a_T \vec{u} + a_N \vec{n}$$

$$a_T = \frac{dv}{dt} = r \cdot \frac{d\theta}{dt} = r \cdot \dot{\theta}$$

$$a_N = \frac{(r\dot{\theta})^2}{r} = r(\dot{\theta})^2$$

ولدينا كذلك  $\rho = r$  أي أن

## II - العلاقة الأساسية للتحرّك في حالة دوران جسم حول محور ثابت .

تخص هذه العلاقة كل جسم صلب خاضع لتأثيرات ميكانيكية في دوران حول محور ثابت

### 1 - نص العلاقة

في معلم مرئى بجسم مرجعي أرضي ، بالنسبة لمحور ثابت  $(\Delta)$  يساوي مجموع عزوم القوى المطبقة على جسم صلب في

دوران حول محور ثابت  $(\Delta)$  في كل لحظة ، جداء عزم القصور  $J_\Delta$  والتسارع الزاوي  $\ddot{\theta}$  للجسم في اللحظة المعينة :

$$\sum \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_i) = J_\Delta \cdot \ddot{\theta}$$

$\sum \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_i)$  مجموع العزوم بالنسبة للمحور  $\Delta$  للقوى المطبقة

على الجسم الصلب (N.m)

$J_\Delta$  عزم قصور الجسم الصلب بالنسبة للمحور  $(\Delta)$  نعبّر عنه بـ

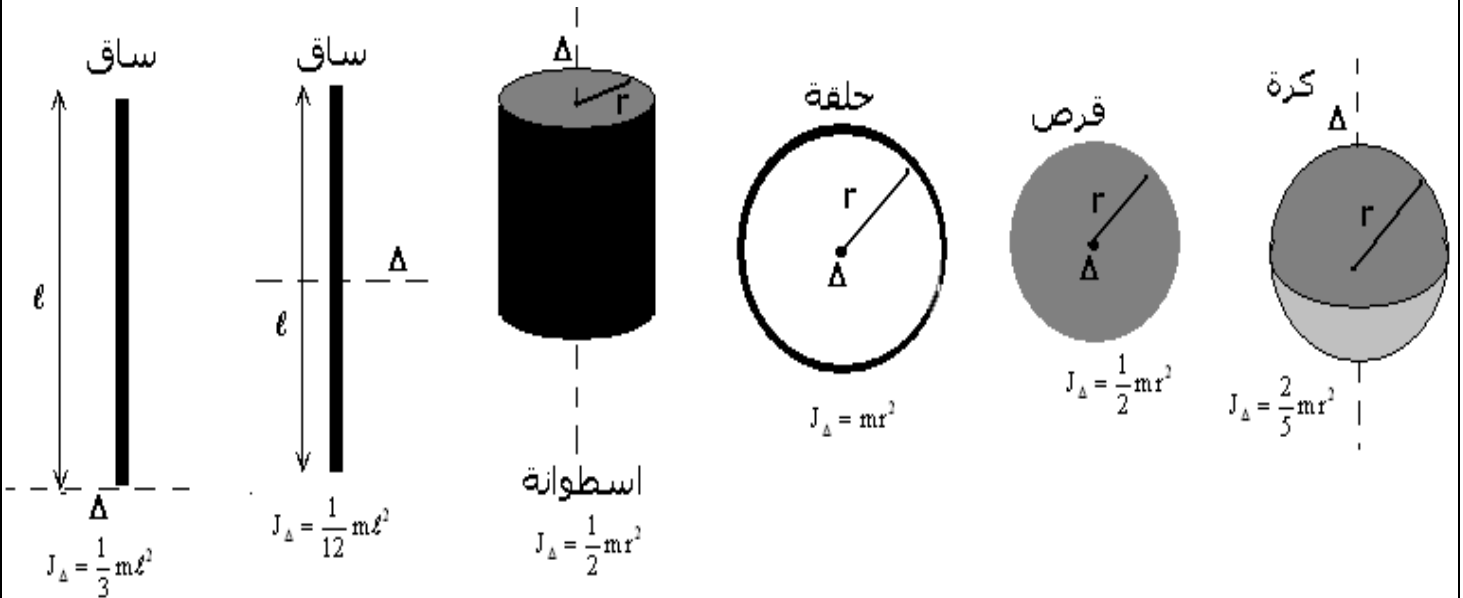
$$\text{kg} \cdot \text{m}^2$$

$\ddot{\theta}$  التسارع الزاوي نعبّر عنه بـ  $\text{rad} / \text{s}^2$

### 2 - تعابير عزم القصور لأجسام متجانسة ذات أشكال

هندسية بسيطة .

عزم قصور  $J_\Delta$  لجسم صلب يميز حركة دوران الجسم حول المحور  $(\Delta)$



حالتان خاصتان :

إذا كان التسارع الزاوي منعدما  $\ddot{\theta} = 0$  فإن حركة الجسم الصلب حول المحور  $\Delta$  حركة دورانية منتظمة .

إذا كان التسارع الزاوي ثابتا تكون حركة الجسم الصلب حول المحور  $\Delta$  حركة دورانية متغيرة بانتظام .

### III - تطبيق : حركة مجموعة ميكانيكية في حالة إزاحة ودوران حول محور ثابت .

نعتبر أسطوانة متجانسة شعاعها  $r=10\text{cm}$  وكتلتها  $m=1\text{kg}$  يمكنها الدوران حول محور ثابت  $(\Delta)$  حيث يمر بمركزها ساق T ثبت في طرفيه جسمين نقطيين كتلتها

$m_1 = m_2 = 0,5\text{kg}$  ، يوجد مركز قصورهما على نفس

المسافة  $\ell = 50\text{cm}$  من المحور  $(\Delta)$  . تحمل الأسطوانة

جسما (S) كتلته  $m' = 10\text{kg}$  ، بواسطة حبل ملفوف حولها

نعتبره غير قابل الامتداد وكتلته مهملة.

نترك المجموعة بدون سرعة بدئية ، علما أن الاحتكاكات مهملة وكذلك كتلة الساق .

1 - أوجد التسارع  $a$  للجسم (S) وتوتر الحبل أثناء الحركة

2 - عين السرعة الزاوية للأسطوانة عندما يقطع الجسم

مسافة  $h = 5\text{m}$  . نعطي  $g = 10\text{m/s}^2$

تمرين 3

ندير قرصا متجانسا ، كتلته  $m=10\text{kg}$  وشعاعه  $r=10\text{cm}$  ،

حول محوره إلى أن تصير سرعة دورانه 400 دورة في الدقيقة ، تم نتركه

نلاحظ أن القرص يتوقف عن الدوران بعد ثلاث دقائق تحت تأثير الاحتكاك الذي نقرن به مزدوجة ، نعتبر عزمها ثابتا .

1 - أحسب التسارع الزاوي للقرص .

2 - استنتج عزم المزدوجة الـ

الجواب :

1 - نقوم بدراسة حركة القرص انطلاقا من حصوله على السرعة الزاوية  $\omega_0 = \frac{2\pi \times 400}{60} = 41,8\text{rad/s}$

إلى أن يتوقف أي أن سرعته الزاوية منعدمة . حركة القرص في هذه المرحلة حركة دائرية متغيرة بانتظام ، يمكن أن نبين ذلك بتطبيق العلاقة الأساسية للتحريك :

$$\sum \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{F}) = J_{\Delta} \cdot \ddot{\theta} \Rightarrow \mathcal{M}_c = J_{\Delta} \cdot \ddot{\theta} \Rightarrow \ddot{\theta} = \frac{\mathcal{M}_c}{J_{\Delta}} = \text{cte}$$

أي أن المعادلة الزمنية لهذه الحركة هي :  $\theta(t) = \frac{1}{2} \ddot{\theta} t^2 + \omega_0 t$  ومعادلة السرعة كذلك هي :

$$\dot{\theta}(t) = \ddot{\theta} t + \omega_0$$

عند انعدام السرعة الزاوية لدينا :  $\dot{\theta} t + \omega_0 = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} = -\frac{\omega_0}{t}$

$$\ddot{\theta} = -\frac{\omega_0}{t} = -\frac{41,8}{3 \times 60} = -0,23\text{rad/s}^2$$

2 - حساب عزم المزدوجة المقاومة :

$$\mathcal{M}_c = J_{\Delta} \cdot \ddot{\theta} \text{ بحيث أن } J_{\Delta} = \frac{1}{2} m r^2 = 0,05\text{kg} \cdot \text{m}^2 \text{ وبالتالي فإن } \mathcal{M}_c = -0,0115\text{N} \cdot \text{m}$$

حساب عدد الدورات المنجزة قبل لأن يتوقف :

$$\theta = -0,23(180)^2 + 41,8(180) = 72\text{rad} \text{ لدينا } \theta = -0,23t^2 + 41,8t$$

$$\theta = 2\pi n \Rightarrow n = \frac{\theta}{2\pi} = 11,5$$